BÍ KÍP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH CHỈ TRONG 10 PHÚT

- Khi máy tính casio bó tay
- Khi các kỹ năng phân tích nhân tử đưa về phương trình tích vô hiệu hóa

⇨ ***Các em học sinh sẽ phải xử lý thế nào ? Hãy áp dụng những phương pháp cực hữu ích sau đây***

Chuyên đề 1. Phương pháp miền giá trị giải hệ phương trình

1. Dấu hiệu nhận biết:

- **Trường hợp 1:** Hệ có 1 trong 2 phương trình là bậc 2 với x, y.

  Cách giải: Coi phương trình là bậc 2 ẩn x, giải $\Delta \geq 0 \Rightarrow$ điều kiện của y.

  Coi phương trình là bậc 2 ẩn y, giải $\Delta \geq 0 \Rightarrow$ điều kiện của x.

  Dùng điều kiện của x, y để đánh giá phương trình còn lại.

- **Trường hợp 2:** Hệ có 2 phương trình cùng là bậc hai với x (hoặc cùng là bậc hai với y).

  Cách giải: Với phương trình (1), coi x là ẩn, giải $\Delta \geq 0 \Rightarrow$ điều kiện của y.

  Với phương trình (2), coi x là ẩn, giải $\Delta \geq 0 \Rightarrow$ điều kiện của y.

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^4 + y^2 = \dfrac{697}{81} & (1) \\ x^2 + y^2 + xy - 3x - 4y + 4 = 0 & (2) \end{cases}$$

Coi (2) là phương trình bậc hai ẩn x :

$$x^2 + (y-3)x + y^2 - 4y + 4 = 0$$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$

$$\Leftrightarrow (y-3)^2 - 4(y^2 - 4y + 4) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 6y + 9 - 4y^2 + 16y - 16 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -3y^2 + 10y - 7 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq y \leq \frac{7}{3}$$

Coi (2) là phương trình bậc hai ẩn y :

$$y^2+(x-4)y+x^2-3x+4=0$$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \ge 0$

$$\Leftrightarrow (x-4)^2-4(x^2-3x+4)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow x^2-8x+16-4x^2+12x-16\ge 0$$

$$\Leftrightarrow -3x^2+4x\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 0\le x\le \frac{4}{3}$$

$\forall y\in\left[1,\frac{7}{3}\right],\ x\in\left[0,\frac{4}{3}\right]$ thì $x^4+y^2\le\left(\frac{4}{3}\right)^4+\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{697}{81}\Rightarrow$ VT(1)$\le$ VP(1), do đó VT(1)=VP(1) khi $x=\frac{4}{3},\ y=\frac{7}{3}$. Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(\frac{4}{3},\frac{7}{3}\right)$.

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}(2x^2-1)(2y^2-1)=\frac{7}{2}xy & (1)\\ x^2+y^2+xy-7x-6y+14=0 & (2)\end{cases}$$

Coi (2) là phương trình bậc hai ẩn x :

$$x^2+(y-7)x+y^2-6y+14=0$$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta\ge 0$

$$\Leftrightarrow y^2-14y+49-4y^2+24y-56\ge 0$$

$$\Leftrightarrow -3y^2+10y-7\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 1\le y\le\frac{7}{3}$$

Coi (2) là phương trình bậc hai ẩn y :

$$y^2+(x-6)y+x^2-7x+14=0$$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta\ge 0$

$$\Leftrightarrow x^2-12x+36-4x^2+28x-56\ge 0$$

$$\Leftrightarrow -3x^2+16x-20\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 2\le x\le\frac{10}{3}$$

$x=y=0$ không là nghiệm của hệ.

$$(1) \Leftrightarrow \left(2x-\frac{1}{x}\right)\left(2y-\frac{1}{y}\right)=\frac{7}{2} \qquad (3)$$

Đặt $f(t)=2t-\frac{1}{t} \Rightarrow f'(t)=2+\frac{1}{t^2}>0 \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$.

- Xét $t\in\left[1;\frac{7}{3}\right] \Rightarrow \begin{cases} f(1)=1 \\ f\left(\frac{7}{3}\right)=\frac{89}{21} \end{cases} \Rightarrow 1\le 2y-\frac{1}{y}\le\frac{89}{21} \quad \forall y\in\left[1;\frac{7}{3}\right]$.
- Xét $t\in\left[2;\frac{10}{3}\right] \Rightarrow \begin{cases} f(2)=\frac{7}{2} \\ f\left(\frac{10}{3}\right)=\frac{191}{30} \end{cases} \Rightarrow \frac{7}{2}\le 2x-\frac{1}{x}\le\frac{191}{30} \quad \forall x\in\left[2;\frac{10}{3}\right]$.

$\Rightarrow$ VT (3) $\ge\frac{7}{2}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$. Vậy hệ có nghiệm (1;2).

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2y^2-2x+y^2=0 & (1) \\ 2x^2-4x+3+y^3=0 & (2) \end{cases}$$

Coi (1) là phương trình bậc hai ẩn x :

$$x^2y^2-2x+y^2=0.$$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'\ge 0 \Leftrightarrow 1-y^4\ge 0 \Leftrightarrow -1\le y\le 1$. (3)

Coi (2) là phương trình bậc hai ẩn x :

$$2x^2-4x+3+y^3=0.$$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'\ge 0 \Leftrightarrow 4-2\left(3+y^3\right)\ge 0 \Leftrightarrow 1+y^3\le 0 \Leftrightarrow y\le -1$. (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow y=-1$. Thay vào hệ ta được x=1. Vậy hệ có nghiệm (1;-1).

2. Bài tập tự luyện

$$\begin{cases} x^3+y^2=2 \\ x^2+xy+y^2-y=0 \end{cases}$$

Chuyên đề 2. Phương pháp nhân chia giải hệ phương trình

3. Dấu hiệu nhận biết:

- **Trường hợp 1:** Hệ phương trình tích
- **Trường hợp 2:** Hệ phương trình chưa phải là hệ phương trình tích nhưng có thể sử dụng các biến đổi đại số để đưa về hệ phương trình tích

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (x-y)\sqrt{y} = \dfrac{\sqrt{x}}{2} & (1) \\ (x+y)\sqrt{x} = 3\sqrt{y} & (2) \end{cases}$$

Điều kiện: $x, y \geq 0$

+) Dễ thấy $x = y = 0$ là 1 nghiệm của hệ

+) Với $x, y > 0$, chia 2 vế của phương trình (1) và (2) cho nhau ta được:

$$\frac{(x-y)\sqrt{y}}{(x+y)\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{6\sqrt{y}}$$

$$\Leftrightarrow 6y(x-y) = x(x+y)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5xy + 6y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3y \\ x = 2y \end{array}\right.$$

Với $x = 3y$, thay vào phương trình (1) ta được:

$$2y\sqrt{y} = \frac{\sqrt{3y}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4y^3 = \frac{3y}{4}$$
$$\Leftrightarrow 16y^3 = 3y$$
$$\Leftrightarrow y(16y^2 - 3) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = \pm\frac{\sqrt{3}}{4} \end{array}\right.$$

Đối chiếu với điều kiện ta được:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow x = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Với $x = 2y$, thay vào phương trình (1) ta được:

$$y\sqrt{y} = \frac{\sqrt{2y}}{2}$$
$$\Leftrightarrow 2y\sqrt{y} = \sqrt{2y}$$
$$\Leftrightarrow 4y^3 = 2y$$
$$\Leftrightarrow 2y(2y^2 - 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = \frac{\pm\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$

Đối chiếu với điều kiện ta được:

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm (0, 0); $(\frac{3\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$; $(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

<u>Ví dụ 2:</u> Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}(x-1)\,y^2+x+y=3\\(y-2)\,x^2+y=x+1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)\,y^2+(x-1)=2-y\\(y-2)\,x^2+(y-2)=x-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)(y^2+1)=2-y & (1)\\(y-2)(x^2+1)=x-1 & (2)\end{cases}$$

+) Nhận thấy $x=1,\ y=2$ là nghiệm của hệ phương trình.

+) Với $x\neq 1, y\neq 2$, nhân 2 vế của phương trình (1) và (2) cho nhau, ta được:

$$(x^2+1)(y^2+1)=1 \qquad (3)$$

Do $\begin{matrix}x^2+1\geq 1\\y^2+1\geq 1\end{matrix}$

$$\Rightarrow VT(3)\ \geq\ VP(3)$$

Khi đó VT(3)=VP(3) $\Leftrightarrow x=y=0$.

Thay $x=y=0$ vào hệ ban đầu không thỏa mãn. Vậy hệ có nghiệm duy nhất (1,2).

<u>Ví dụ 3:</u> Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\left(4+\dfrac{1}{y+2x}\right)\sqrt{x}=2\sqrt{3}\\[2mm]\left(4-\dfrac{1}{y+2x}\right)\sqrt{y}=4\end{cases}$$

Điều kiện: $x,\ y>0$

Hệ phương trình $\Leftrightarrow\begin{cases}4+\dfrac{1}{y+2x}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{x}} & (1)\\[2mm]4-\dfrac{1}{y+2x}=\dfrac{4}{\sqrt{y}} & (2)\end{cases}$

Cộng 2 vế của phương trình (1) và (2), trừ 2 vế của phương trình (1) và (2) ta được hệ :

$$\begin{cases} 8=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{x}}+\dfrac{4}{\sqrt{y}} & (3) \\ \dfrac{2}{y+2x}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{x}}-\dfrac{4}{\sqrt{y}} & (4) \end{cases}$$

Nhân 2 vế của phương trình (3) và (4) ta được:

$$\frac{16}{2x+y}=\frac{12}{x}-\frac{16}{y}$$

$$\Leftrightarrow 8x^2+2xy-3y^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=\dfrac{1}{2}y & \text{(thỏa mãn)} \\ x=-\dfrac{3}{4}y & \text{(loại)} \end{array}\right.$$

Với $y=2x$, thế vào phương trình ban đầu ta được:

$$\left(4+\frac{1}{4x}\right)\sqrt{x}=2\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow (16x+1)\sqrt{x}=8x\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 16x+1=8\sqrt{x}\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow (16x+1)^2=192x$$

$$\Leftrightarrow 256x^2-160x+1=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5+2\sqrt{6}}{16} \\ x=\dfrac{5-2\sqrt{6}}{16} \end{array}\right.$$

Vậy hệ có 2 nghiệm $\left(\frac{5+2\sqrt{6}}{16},\frac{5+2\sqrt{6}}{8}\right)$ và $\left(\frac{5-2\sqrt{6}}{16},\frac{5-2\sqrt{6}}{8}\right)$.

4. Bài tập tự luyện

Bài 1. $\begin{cases}(1+\dfrac{1}{y+x})\sqrt{3x}=2\\(1-\dfrac{1}{y+x})\sqrt{2y}=4\sqrt{2}\end{cases}$

Bài 2. $\begin{cases}(1-\dfrac{12}{y+3x})\sqrt{x}=2\\(1+\dfrac{12}{y+3x})\sqrt{y}=6\end{cases}$

Chuyên đề 3. Phương pháp thế hạng tử tự do

Chú ý:

Ở phương pháp này ta cần làm những bước sau để giải được bài toán:

- Đưa các số hạng cùng bậc về cùng một nhóm
- So sánh bậc của hai phương trình để tìm cách thế hợp lí.

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+2xy^2+y=0 & (1) \\ 8y^2+x^2=1 & (2) \end{cases}$

Giải: Thế phương trình (2) vào phương trình (1) ta được:

$$x^3+2xy^2+(8y^2+x^2)y=0$$
$$\Leftrightarrow x^3+2xy^2+x^2y+8y^3=0 \ \ (3)$$

- Nhận thấy x=0 không là nghiệm của hệ phương trình.
- Khi $x\neq 0$, chia cả 2 vế của phương trình (3) cho $x^3\neq 0$ ta được:

:
$$1+2\left(\frac{y}{x}\right)^2+\left(\frac{y}{x}\right)+8\left(\frac{y}{x}\right)^3=0. \ \ (4)$$

Đặt $\frac{y}{x}=t$, thì phương trình (4) có dạng:

$$8t^3+2t^2+t+1=0$$

$$\Leftrightarrow (2t+1)(4t^2-t+1)=0$$

$$\Leftrightarrow t=\frac{-1}{2}\Rightarrow x=-2y$$

Thế vào phương trình (2) ta được $12y^2=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\frac{1}{2\sqrt{3}}\Rightarrow x=\frac{-1}{\sqrt{3}} \\ y=\frac{-1}{2\sqrt{3}}\Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)=\left(\frac{-1}{\sqrt{3}};\frac{1}{2\sqrt{3}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{-1}{2\sqrt{3}}\right)$.

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 & (1) \\ x^5 + y^5 = x^2 + y^2 & (2) \end{cases}$

Giải: Thế phương trình (1) vào (2) ta được

$$\begin{aligned} & x^5 + y^5 = (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) \\ \Leftrightarrow\ & x^2y^3 + x^3y^2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2y^2(x + y) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ x = -y. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Nếu $x = 0$ thì từ (1) suy ra $y = 1$.

Nếu $y = 0$ thì từ (1) suy ra $x = 1$.

Nếu $x = -y$ thì từ (1) suy ra $0 = 1$, dẫn tới phương trình vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình có nghiệm là (x;y) = (0;1), (1;0).

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3\text{-}8x = y^3 + 2y \\ x^2\text{-}3 = 3(y^2 + 1) \end{cases}$$

Giải:

$$\begin{cases} x^3\text{-}8x = y^3 + 2y \\ x^2\text{-}3 = 3(y^2 + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - y^3 = 2(4x + y) & (1) \\ x^2 - 3y^2 = 6 & (2) \end{cases}$$

Thế phương trình (2) vào phương trình (1) ta đươc

$$\begin{aligned} & 3(x^3 - y^3) = (x^2 - 3y^2)(4x + y) \\ \Leftrightarrow\ & 3x^3 - 3y^3 = 4x^3 + x^2y - 12xy^2 - 3y^3 \\ \Leftrightarrow\ & x^3 + x^2y - 12xy^2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 + xy - 12y^2 = 0 \quad (3) \end{array}\right. \end{aligned}$$

Nếu x=0 thì từ (2) suy ra phương trình vô nghiệm.

Nếu $x \neq 0$, thì chia cả 2 vế của phương trình (3) cho $x^2 \neq 0$ ta được:

$$1+\left(\frac{y}{x}\right)-12\left(\frac{y}{x}\right)^2=0.$$

Đặt $\frac{y}{x}=t$, ta có phương trình sau $1+t-12t^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{1}{3} \\ t=\frac{-1}{4} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=3y \\ x=-4y \end{array}\right.$

Với x=3y, thay vào phương trình (2) ta được $6y^2=6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \Rightarrow x=3 \\ y=-1 \Rightarrow x=-3 \end{array}\right.$

Với x=-4y, thay vào phương trình (2) ta được

$$13y^2=6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\sqrt{\frac{6}{13}} \Rightarrow x=-4\sqrt{\frac{6}{13}} \\ y=-\sqrt{\frac{6}{13}} \Rightarrow x=4\sqrt{\frac{6}{13}} \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(-3;-1),(3;1),\left(-4\sqrt{\frac{6}{13}};\sqrt{\frac{6}{13}}\right),\left(4\sqrt{\frac{6}{13}};-\sqrt{\frac{6}{13}}\right)$.

Ví dụ 4: Giải hệ phương trình (ĐHKA-2011)

$$\begin{cases} 5x^2y-4xy^2+3y^3-2(x+y)=0 & (1) \\ xy(x^2+y^2)+2=(x+y)^2 & (2) \end{cases}$$

Giải:

Ta có: $(2) \Leftrightarrow (xy-1)(x^2+y^2-2)=0 \Leftrightarrow xy=1$ hoặc $x^2+y^2=2$.

- Nếu $xy=1$ thì từ (1) suy ra: $y^4-2y^2+1=0 \Leftrightarrow y=\pm 1$.
  Suy ra: (x;y)=(1;1) hoặc (x;y)=(-1;-1)
- Nếu $x^2+y^2=2$ thì từ (1) suy ra:

$$3y(x^2+y^2)-4xy^2+2x^2y-2(x+y)=0$$
$$\Leftrightarrow 6y-4xy^2+2x^2y-2(x+y)=0$$
$$\Leftrightarrow (1-xy)(2y-x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} xy=1 \\ x=2y \end{array}\right.$$

Với x=2y, từ $x^2+y^2=2$ suy ra:

$$(x;y)=\left(\frac{2\sqrt{10}}{5};\frac{\sqrt{10}}{5}\right) \text{ hoặc } (x;y)=\left(-\frac{2\sqrt{10}}{5};-\frac{\sqrt{10}}{5}\right).$$

Vậy hệ có nghiệm: $(1;1),(-1;-1),\left(\frac{2\sqrt{10}}{5};\frac{\sqrt{10}}{5}\right),\left(-\frac{2\sqrt{10}}{5};-\frac{\sqrt{10}}{5}\right).$

Bài tập tự luyện

Giải các hệ phương trình sau:

Bài 1.

$$\begin{cases} y^3+y^2x+3x-6y=0 \\ x^2+xy=3 \end{cases}$$

Bài 2.

$$\begin{cases} x\sqrt{x}-8\sqrt{y}=\sqrt{x}+y\sqrt{y} \\ x-y=5 \end{cases}$$

Bài 3.

$$\begin{cases} x^3+8y^3-4xy^2=1 \\ 2x^4+8y^4-2x-y=0 \end{cases}$$

Chuyên đề 4. Phương pháp hàm đặc trưng

5. Nội dung phương pháp:

Phương pháp này ta sẽ sử dụng với hệ mà các phương trình có x và y độc lập với nhau hoặc có thể biến đổi về hệ phương trình có x và y độc lập với nhau. Sau đó xét một hàm số $f(t)$ đồng biến (hoặc nghịch biến) trên D. Khi đó phương trình

$$f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v.$$

Để xuất hiện hàm đặc trưng cần chú ý:

- Hàm đặc trưng sẽ xuất hiện từ (1) trong (2) phương trình của hệ thông qua biến đổi đại số, đặt ẩn phụ hoặc chia cả hai vế của phương trình cho cùng một biểu thức.
- Hàm đặc trưng sẽ xuất hiện sau khi cộng hoặc trừ hai phương trình của hệ.

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3(2+3y)=1 \\ x(y^3-2)=3 \end{cases}$

Giải:

- Xét x=0 không là nghiệm của hệ phương trình.
- Xét $x\neq 0$: $\begin{cases} x^3(2+3y)=1 \\ x(y^3-2)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+3y=\dfrac{1}{x^3} & (1) \\ y^3-2=\dfrac{3}{x} & (2) \end{cases}$

Cộng 2 phương trình (1) và (2) ta được: $\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{3}{x}=y^3+3y$.(3)

Xét hàm :

$$f(t)=t^3+3t.$$

Ta có $f'(t)=3t^2+3>0$ suy ra hàm $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$(3) \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = f(y)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} = y$$

Thay vào phương trình (1) ta được:

$$x^3(2+\frac{3}{x}) = 1 \Leftrightarrow 2x^3 + 3x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 2 \\ x = -1 \Rightarrow y = -1 \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y) = \left(\frac{1}{2};2\right),(-1;-1)$.

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 2x + 2} = 3^{y-1} + 1 \ (1) \\ y + \sqrt{y^2 - 2y + 2} = 3^{x-1} + 1 \ (2) \end{cases}$

Giải:

$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 2x + 2} = 3^{y-1} + 1 \\ y + \sqrt{y^2 - 2y + 2} = 3^{x-1} + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1) + \sqrt{(x-1)^2 + 1} = 3^{y-1} \\ (y-1) + \sqrt{(y-1)^2 + 1} = 3^{x-1} \end{cases}$$

Trừ hai vế của 2 phương trình cho nhau ta đươc:

$$(x-1) + \sqrt{(x-1)^2 + 1} + 3^{x-1} = (y-1) + \sqrt{(y-1)^2 + 1} + 3^{y-1} \ (3)$$

Xét hàm $f(t) = t + \sqrt{t^2 + 1} + 3^t$.Ta có $f'(t) = 1 + \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} + 3^t \ln t > 0, \forall t$ suy ra hàm $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$(3) \Leftrightarrow f(x-1) = f(y-1)$$

$$\Leftrightarrow x = y$$

Thay vào 1 trong 2 phương trình được:

$$x-1+\sqrt{(x-1)^2+1}=3^{x-1}$$

Đặt

$$u=x-1$$

Ta được phương trình

$$u+\sqrt{u^2+1}=3^u$$
$$\Leftrightarrow 3^{-u}\left(u+\sqrt{u^2+1}\right)=1$$

Xét hàm: $g(u)=3^{-u}\left(u+\sqrt{u^2+1}\right)\Rightarrow g'(u)=-3^{-u}\ln 3.\left(1+\frac{u}{\sqrt{u^2+1}}\right)<0$.

Suy ra hàm $g(u)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác, g(0)=1, do đó phương trình có 1 nghiệm duy nhất u=0 suy ra hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x;y)=(1;1).

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^5+xy^4=y^{10}+y^6 & (1) \\ \sqrt{4x+5}+\sqrt{y^2+8}=6 & (2) \end{cases}$

Giải:

Nhận thấy $y=0$ không là nghiệm của hệ nên ta chia cả 2 vế phương trình (1) cho $y^5\neq 0$:ta được:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^5+\frac{x}{y}=y^5+y \quad (3)$$

Ta xét hàm:

$f(t)=t^5+t\Rightarrow f'(t)=5t^4+1>0$. Suy ra hàm $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$(3) \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(y)$$
$$\Leftrightarrow \frac{x}{y} = y$$
$$\Leftrightarrow x = y^2$$

Thay vào phương trình (2):

$$\sqrt{4x+5} + \sqrt{x+8} = 6$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{4x+5} - 3\right) + \left(\sqrt{x+8} - 3\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{4(x-1)}{\sqrt{4x+5}+3} + \frac{x-1}{\sqrt{x+8}+3} = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{4}{\sqrt{4x+5}+3} + \frac{1}{\sqrt{x+8}+3}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ \dfrac{4}{\sqrt{4x+5}+3} + \dfrac{1}{\sqrt{x+8}+3} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = \pm 1$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y) = (1;1)$, (1;-1)

Ví dụ 4 (ĐHKA-2010). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \left(4x^2+1\right)x + (y-3)\sqrt{5-2y} = 0 & (1) \\ 4x^2 + y^2 + 2\sqrt{3-4x} = 7 & (2) \end{cases}$$

Giải:

Đặt $\sqrt{5-2y} = t\,(t \geq 0) \Rightarrow y = \dfrac{5-t^2}{2}$.

$$(1) \Leftrightarrow \left(4x^2+1\right)x + \frac{-1-t^2}{2}.t = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x\left[(2x)^2+1\right] = \left(t^2+1\right)t \quad (3)$$

Ta xét hàm:

$f\left(t\right)=(t^2+1)t\Rightarrow f'(t)=3t^2+1>0$. Suy ra hàm $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}(3)&\Leftrightarrow f\left(2x\right)=f(t)\\&\Leftrightarrow 2x=t\\&\Leftrightarrow 2x=\sqrt{5-2y}\\&\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ y=\dfrac{5-4x^2}{2}\end{cases}\end{aligned}$$

Thế vào (2) ta được:

$$4x^2+\left(\frac{5}{2}-2x^2\right)^2+2\sqrt{3-4x}=7 \qquad (4), \qquad 0\le x\le\frac{3}{4}$$

Dễ thấy $x=0,\ x=\dfrac{3}{4}$ không là nghiệm của (4)**.**

Xét $g(x)=4x^2+\left(\dfrac{5}{2}-2x^2\right)^2+2\sqrt{3-4x}$ trên $\left(0;\dfrac{3}{4}\right)$.

$$\begin{aligned}g'(x)&=8x-8x\left(\frac{5}{2}-2x^2\right)-\frac{4}{\sqrt{3-4x}}=-12x+16x^3-\frac{4}{\sqrt{3-4x}}\\&=4x\left(4x^2-3\right)-\frac{4}{\sqrt{3-4x}}<0 \quad \forall x\in\left(0;\frac{3}{4}\right)\end{aligned}$$

Suy ra hàm $g(x)$ nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{3}{4}\right)$. Mặt khác $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=0\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$ là nghiệm duy nhất của $(4)\Rightarrow y=2$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=\left(\dfrac{1}{2};2\right)$

NOTE: Chúng ta chỉ xét hàm trên (a,b) chứ không xét hàm trên [a,b], vì trong một số trường hợp tại các điểm mút a,b đạo hàm không xác định. Vì vậy các em nên tách 2 điểm đầu mút xét riêng xem có là nghiệm của phương trình không.

Ví dụ 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} e^{x-y} + e^{x+y} = 2(x+1) & (1) \\ e^{x+y} = x - y + 1 & (2) \end{cases}$

Giải:

Đặt $u = x + y,\ v = x - y$. Hệ có dạng:

$$\begin{cases} e^u + e^v = u + v + 2 = (u+1) + (v+1) \\ e^u = v + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^u + e^v = (u+1) + e^u \\ e^u = v + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^v = u + 1 & (3) \\ e^u = v + 1 & (4) \end{cases}$$

Trừ 2 vế của (3) và (4) cho nhau ta được: $e^v - e^u = u - v$

$$\Leftrightarrow e^v + v = e^u + u \quad (5)$$

Ta xét hàm:

$f(t) = e^t + t \Rightarrow f'(t) = e^t + 1 > 0$. Suy ra hàm $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$(5) \Leftrightarrow f(u) = f(v)$$
$$\Leftrightarrow u = v$$

$$\Leftrightarrow x + y = x - y \Leftrightarrow y = 0$$

Từ $(2) \Rightarrow e^x = x + 1 \Leftrightarrow e^x - x = 1.$ (6)

Đặt $g(x) = e^x - x,\ g'(x) = e^x - 1.$

- Nếu $x > 0 \Rightarrow g'(x) > 0 \Rightarrow g(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$. $\Rightarrow g(x) > g(0) \Rightarrow g(x) > 1$. Suy ra (6) vô nghiệm.
- Nếu $x < 0 \Rightarrow g'(x) < 0 \Rightarrow g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;0) \Rightarrow g(x) > g(0)$ $. \Rightarrow g(x) > 1$. Suy ra (6) vô nghiệm.
- Nếu $x = 0 \Rightarrow \text{VT}(6) = \text{VP}(6) = 1 \Rightarrow x = 0$ là nghiệm duy nhất của (6).

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=(0;0).$

6. Bài tập tự luyện

Giải các hệ phương trình sau:

Bài 1.

$$\begin{cases} 2y^3+2x\sqrt{1-x}=3\sqrt{1-x}-y \\ y=2x^2-1+2xy\sqrt{1+x} \end{cases}$$

Bài 2.

$$\begin{cases} 2(2x+1)^3+2x+1=(2y-3)\sqrt{y-2} \\ \sqrt{4x+2}+\sqrt{2y+4}=6 \end{cases}$$

Bài 3.

$$\begin{cases} y^3+y=x^3+3x^2+4x+2 \\ \sqrt{1-x^2}-\sqrt{y}=\sqrt{2-y}-1 \end{cases}$$

Bài 4.

$$\begin{cases} (3-x)\sqrt{2-x}-2y\sqrt{2y-1}=0 \\ 2\sqrt{2-x}-\sqrt{(2y-1)^3}=1 \end{cases}$$

Chuyên đề 5. Phương pháp đặt ẩn phụ

7. **Nội dung phương pháp: Sử dụng phương pháp khi hệ phương trình có vế phải độc lập với x hoặc y. Khi đó ta khử x, y ở vế phải của cả hai phương trình và lựa chọn ẩn phụ cho phù hợp.**

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y+xy^2=6x^2 \\ 1+x^2y^2=5x^2 \end{cases}$

Giải:

- Xét x=0 không là nghiệm của hệ phương trình.
- Xét $x \neq 0$, chia cả 2 vế của hai phương trình cho $x^2 \neq 0$ ta được:

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x^2}+\dfrac{y^2}{x}=6 \\ \dfrac{1}{x^2}+y^2=5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y}{x}\left(\dfrac{1}{x}+y\right)=6 \\ \left(\dfrac{1}{x}+y\right)^2-2\dfrac{y}{x}=5 \end{cases}$$

Đặt $u=\dfrac{y}{x};v=\dfrac{1}{x}+y$ ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} u.v=6 \\ v^2-2u=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=\dfrac{6}{v} \\ v^2-2\dfrac{6}{v}-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=\dfrac{6}{v} \\ v^3-5v-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=2 \\ v=3 \end{cases}$$

Với u=2, v=3:

$$\begin{cases}\dfrac{y}{x}=2\\ \dfrac{1}{x}+y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2x\\ \dfrac{1}{x}+2x=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2x\\ 2x^2-3x+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}\\ \begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\ y=1\end{cases}\end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)=(1;2),\left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases}xy^2-2y+3x^2=0 & (1)\\ y^2+x^2y+2x=0 & (2)\end{cases}$

Giải:

- Ta có x=y=0 là một nghiệm của hệ phương trình.
- Khi $x\neq 0; y\neq 0$, chia 2 vế của phương trình (1) cho x^2, chia 2 vế của phương trình 2 cho y^2 ta được:

$$\begin{cases}\dfrac{y^2}{x}-2\dfrac{y}{x^2}+3=0\\ 1+\dfrac{x^2}{y}+2\dfrac{x}{y^2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{y^2}{x}-2\dfrac{y}{x^2}=-3\\ \dfrac{x^2}{y}+2\dfrac{x}{y^2}=-1\end{cases}$$

Đặt $u=\dfrac{y^2}{x};v=\dfrac{x^2}{y}$ ta được hệ phương trình

$$\begin{cases}u-\dfrac{2}{v}=-3\\ v+\dfrac{2}{u}=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u-\dfrac{2}{v}=-3\\ v+\dfrac{2}{-3+\dfrac{2}{v}}=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u-\dfrac{2}{v}=-3\\ -3v^2+v+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=-3+2v\\ \left[\begin{array}{l}v=1\\ v=-\dfrac{2}{3}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}u=-1\\ v=1\end{cases}\\ \begin{cases}u=-6\\ v=-\dfrac{2}{3}\end{cases}\end{array}\right.$$

Với u= -1,v=1 ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{x} = -1 \\ \dfrac{x^2}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ \dfrac{x^2}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Với $u = -6; v = \dfrac{-2}{3}$ ta có

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{x} = -6 \\ \dfrac{x^2}{y} = -\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}} \\ y = -\dfrac{6}{\sqrt[3]{9}} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y) = \left(-\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}; -\dfrac{6}{\sqrt[3]{9}}\right), (-1;1)$.

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy + 1 = 4y \\ y(x+y)^2 = 2x^2 + 7y + 2 \end{cases}$

Giải:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy + 1 = 4y \\ y(x+y)^2 = 2x^2 + 7y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(x+y) + (x^2+1) = 4y \\ y(x+y)^2 - 2(x^2+1) = 7y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + \dfrac{x^2+1}{y} = 4 \\ (x+y)^2 - 2\dfrac{x^2+1}{y} = 7 \end{cases}$$

Đặt $u = x + y; v = \dfrac{x^2+1}{y}$ ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} u + v = 4 \\ u^2 - 2v = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 4 - v \\ u^2 - 2v = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 4 - v \\ v^2 - 10v + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 4 - v \\ \left[\begin{array}{l} v = 1 \\ v = 9 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 3 \\ v = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} u = -5 \\ v = 9 \end{cases} \end{array}\right.$$

Với $u = 3; v = 1$:

$$\begin{cases} x+y=3 \\ \dfrac{x^2+1}{y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3-x \\ \dfrac{x^2+1}{y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3-x \\ \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-1 \\ y=4 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Với $u=-5; v=9$:

$$\begin{cases} x+y=-5 \\ \dfrac{x^2+1}{y}=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-5-x \\ \dfrac{x^2+1}{y}=9 \end{cases} \text{(vô nghiệm)}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(-1;4),(2;1)$.

Ví dụ 4: Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^3=x^3(9-x^3) & (1) \\ x^2y+y^2=6x & (2) \end{cases}$

Giải:

- Nhận thấy x=y=0 là một nghiệm của hệ phương hệ phương trình.
- Xét $x\neq 0; y\neq 0$. Chia 2 vế của phương trình (1) cho x^3, chia 2 vế của phương trình (2) cho x ta được:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{y}{x}\right)^3=9-x^3 \\ xy+\dfrac{y^2}{x}=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{y}{x}\right)^3+x^3=9 \\ y(x+\dfrac{y}{x})=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+\dfrac{y}{x}\right)(x^2-y+\dfrac{y^2}{x^2})=9 \\ y(x+\dfrac{y}{x})=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+\dfrac{y}{x}\right)[\left(x+\dfrac{y}{x}\right)^2\text{-3y]=9} \\ y\left(x+\dfrac{y}{x}\right)=6 \end{cases}$$

Đặt $u=x+\dfrac{y}{x}; v=y$ ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} u(u^2-3v)=9 \\ u.v=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=\dfrac{6}{u} \\ u^3=27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=3 \\ u=3 \end{cases}$$

Với u=3;v=3: $\begin{cases} x+\dfrac{y}{x}=3 \\ y=3 \end{cases}$ ***(hệ vô nghiệm)***

Vậy hệ phương trình có nghiệm: (x;y)=(0;0).

8. Bài tập tự luyện

Bài 1.

$$\begin{cases} 1+x^3y^3=19x^3 \\ y+xy^2=-6x^2 \end{cases}$$

Bài 2.

$$\begin{cases} x^3(2+3y)=8 \\ x(y^3-2)=6 \end{cases}$$

Bài 3.

$$\begin{cases} x^2-2xy+x+y=0 \\ x^4-4x^2y+3x^2+y^2=0 \end{cases}$$

Bài 4.

$$\begin{cases} 1+x^3y^3=19x^3 \\ y+xy^2=-x^2 \end{cases}$$

Bài 5.

$$\begin{cases} x^2+1+y(x+y)=4y \\ (x^2+1)(y+x-2)=y \end{cases}$$

Bài 6.

$$\begin{cases} 8x^3y^3+27=18x^3 \\ 4xy^2+6x=y^2 \end{cases}$$

Bài 7.

$$\begin{cases} xy+x+1=7y \\ x^2y^2+xy+1=13x^2 \end{cases}$$

Bài 8.

$$\begin{cases} x^3-xy^2=216y \\ x^2y-y^3=24x \end{cases}$$